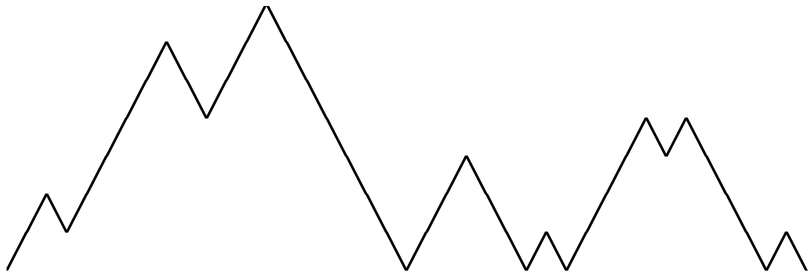
Promenade sur les chemins de Dyck



Les chemins de Dyck (nommés en l'honneur de [Walther von Dyck (https://fr.wikipedia.org/wiki/Walther_von_Dyck)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Walther_von_Dyck)) sont

- des objets combinatoires très simples et bien compris,
- une version finie des excursions browniennes,
- les configurations de quelques modèles de physique statistique,
- la base de riches structures algébriques,
- etc

En quelque sorte un *nombre d'or* ou un *couteau suisse* de la combinatoire.

Au programme : aspects combinatoires, bijections, ordres partiels, cartes planes

Définition:

un **chemin de Dyck** de taille n est une suite de $2n$ lettres 0 ou 1 telle que

- pour chaque lettre, il y a avant cette lettre au moins autant de 1 que de 0
- au total, autant de 1 que de 0

Par exemple, (1,0,1,1,0,0) de taille 3

Contre-exemples :

- (1,0,0,1,1,0) à cause du début (1,0,0) qui contient trop de 0

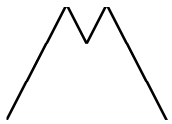
- (1,1,0,0,1,1) qui a plus de 1 que de 0

On peut représenter un chemin de Dyck par un chemin dans $\mathbb{N}^2$ qui commence en (0,0).

La lettre 1 est un pas montant (+1,+1) vers le nord-est : $/$

La lettre 0 est un pas descendant (+1,-1) vers le sud-est : $\backslash$

Par exemple (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) correspond à



Les deux conditions dans la définition deviennent :

- Le chemin reste toujours au dessus de la droite $y = 0$ (altitude 0).
- Le chemin se termine à l'altitude 0.

Si on prend n très grand, en changeant convenablement les échelles du dessin, on obtient une approximation d'une *excursion brownienne* en tirant un chemin de Dyck de taille n au hasard uniforme.

On sait très facilement compter les chemins de Dyck.

Notons D_n l'ensemble des chemins de Dyck de taille n.

Alors $|D_n| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

La preuve standard utilise la série genératrice $D = \sum_{n\geq 0} |D_n| t^n$ et le découpage d'un chemin non vide en deux morceaux au niveau du premier retour à l'altitude 0.

```
   *p*
/      \ *q*
```

La série génératrice est *algébrique* : $D = 1 + tD^2$.

On obtient la suite de nombres qui commence par $1, 1, 2, 5, 14, 42, 429, 1430, \ldots$ qu'on appelle les nombres de Catalan.

[Suite A108 (https://oeis.org/A000108)](https://oeis.org/A000108) dans l'encyclopédie des suites OEIS.

Beaucoup d'autres objets combinatoires sont comptés par les mêmes nombres :

- arbres binaires plans
- arbres plans
- partitions non-croisées
- permutations évitant le motif 132
- fonctions de stationnement (parking) croissantes
- etc

On peut démontrer ceci en contruisant des bijections : il en existe de très nombreuses.

Richard Stanley a écrit un [livre (http://www-math.mit.edu/~rstan/catalan/)](http://www-math.mit.edu/~rstan/catalan/) sur le sujet.

Exemple d'une jolie bijection simple : aplatissement vertical {chemins de Dyck} --> {arbres plans}. On recolle chaque pas montant avec l'unique pas descendant visible à sa droite à la même altitude

```
      /=\/=\                       \ /
     /======\                       |
  /=\/========\        ---->      \ /
 /=============\                   |
```

La bijection inverse consiste à faire le tour de l'arbre en notant montées et descentes. Utile en probabilités.

Une question standard en combinatoire énumérative :

étant donné un ensemble fini d'objets combinatoires, par exemple D_n,

donner un algorithme pour engendrer un élément au hasard (pour la distribution uniforme)

Réponse bien connue et facile pour les chemins de Dyck

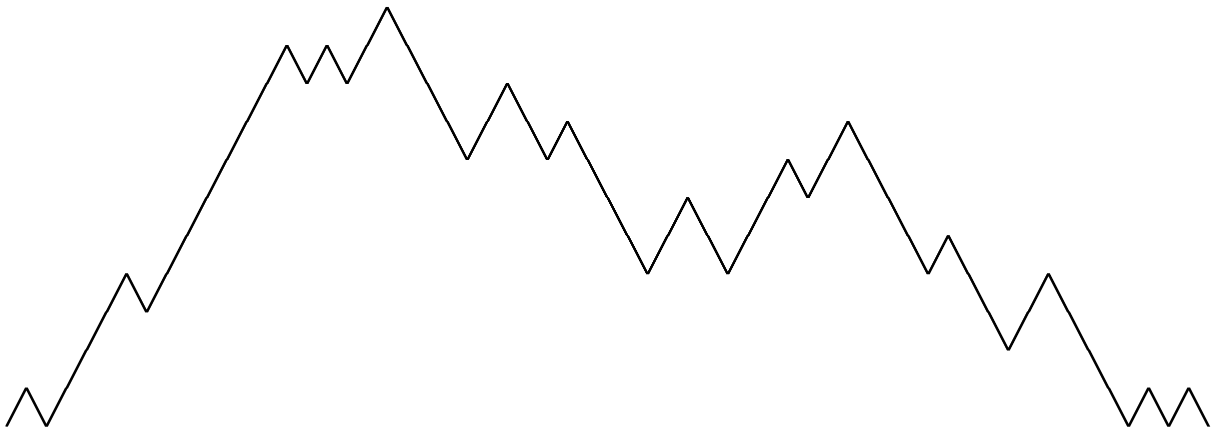
Deux étapes :

- mélanger une liste de n lettres 0 et une liste de $n+1$ lettres 1 pour obtenir un chemin quelconque
- découper en deux chemins au point d'altitude minimale et les recoller dans l'autre sens

(quelques détails omis, voir l'implémentation dans SageMath)

In [20]:

```
print(unicode_art(DyckWords(30).random_element()))
```



En combinatoire, les ensembles d'objets viennent souvent avec une **relation d'ordre partielle** $\leq$ (réflexive, transitive, antisymétrique), qui apporte de la structure supplémentaire utile (un habillage 👕).

Par contre, on a rarement un ordre total dans lequel toutes les paires d'éléments sont comparables.

Par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble fini E est muni de l'ordre partiel d'inclusion $\subseteq$ entre parties.

Parfois, il existe plusieurs ordres partiels, plus ou moins naturels et compliqués.

Par exemple, sur l'ensemble S_n des permutations de {1,2,...,n}, on a notamment

- l'ordre faible ou ordre du permutoèdre (un polytope)
- l'ordre de Bruhat, utile en théorie des représentations
- l'ordre d'intersection des tessons (Nathan Reading)
- l'ordre du support parabolique (Bergeron-Hohlweg-Zabrocki)
- l'ordre du tri par bulles, et les ordres de tri (Drew Armstrong)

Les deux premiers sont classiques, les autres plus récents et moins connus. Tous utiles à des choses différentes.

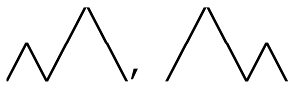
Sur l'ensemble D_n des chemins de Dyck, quels ordres partiels ? Pleins ! On va en présenter quelques uns.

L'ordre le plus simple est l'*inclusion* des chemins, noté $\leq_i$.

Si p et p' sont deux élements de D_n, on dit que $p \leq_i p'$ si le chemin p reste toujours en dessous (au sens large) du chemin p'. Au sens large signifie que les deux chemins peuvent coïncider par endroits.

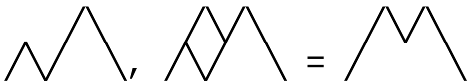
Par exemple, voici deux chemins comparables :

Par contre, les deux chemins suivants ne sont pas comparables pour $\leq_i$:



Pour cet ordre $\leq_i$, on obtient un chemin plus grand en remplacant dans la suite une occurrence de 0,1 (soit ) par 1,0 (soit ).

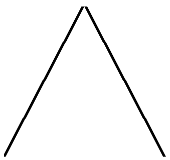
Ceci revient à combler un minimum local (*une vallée*) en ajoutant un carré :



Cette opération décrit les couvertures, *i.e.* les relations $p \leq_i p'$ sans élément intermédiaire.

Un unique élément minimal de la forme  pour l'ordre $\leq_i$

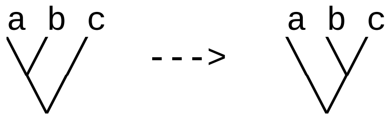
et un unique élément maximal de la forme



L'ordre $\leq_i$ définit un treillis (existence de $x \cup y$ et $x \cap y$ pour tous x, y) qui est distributif.

Un autre ordre important : l'ordre de Tamari

Définition la plus naturelle : sur l'ensemble des arbres binaires plans à $n+1$ feuilles, via l'opération de *rotation* en un sommet



appliquée localement dans un arbre binaire plan.

Ordre introduit par [Dov Tamari (https://fr.wikipedia.org/wiki/Dov_Tamari)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Dov_Tamari) dans les années 1950, en lien avec l'axiome d'associativité $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

Utile et important en topologie algébrique, en relation avec les algèbres A_∞ (associatives à homotopie près) et les associaèdres (polytopes de Stasheff).

Tamari a démontré que cet ordre partiel est un treillis. Pas distributif, mais semi-distributif.

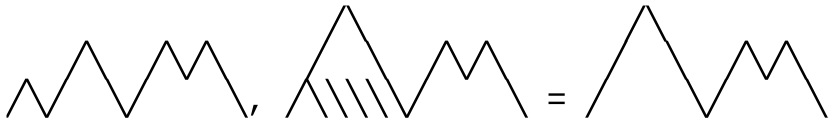
Via une bijection bien choisie entre les arbres binaires plans à $n+1$ feuilles et D_n, on peut *transmogrifier* 🎩 l'ordre de Tamari en en ordre partiel $\leq_t$ sur D_n.

Un petit miracle est qu'on arrive à décrire simplement l'ordre partiel $\leq_t$ obtenu (résultat de François Bergeron).

Soit donc p un chemin de Dyck. On choisit une vallée i de p, dont on note l'altitude h (coordonnée verticale).

Alors il existe dans p un **premier point** j d'altitude h à droite de la vallée i.

Soit p' le chemin obtenu en faisant glisser vers le nord-ouest d'**un pas** (-1,+1) toute la portion de chemin entre i et j



Alors $p \leq_t p'$. L'ordre partiel $\leq_t$ est engendré par ces relations, qui en sont les couvertures.

Un autre ordre sur D_n : l'ordre dextre (variation sur Tamari) noté $\leq_d$

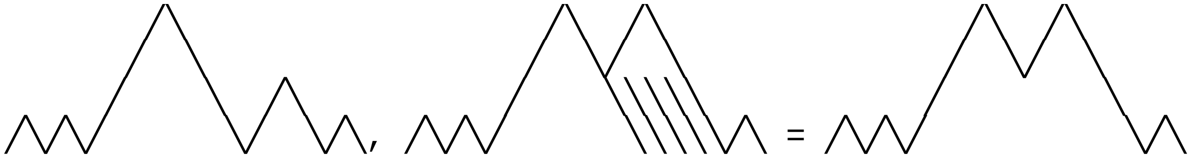
Cette variation récente a été motivée notamment par l'étude des intervalles dans Tamari et leur relation avec la diagonale des associaèdres.

On choisit une vallée i, d'altitude h. On regarde le **premier point** j d'altitude h à droite de i. (comme pour Tamari)

Si ce point j est **suivi d'une descente**, on ne peut pas faire glisser le bloc entre i et j.

Sinon, on peut faire glisser ce bloc vers le nord-ouest d'**un ou plusieurs pas**, donc de $(-k, k)$ pour toute valeur de k qui définit bien un chemin de Dyck.

Voici un exemple d'un tel mouvement, qui est une couverture dextre:



L'ordre partiel $\leq_d$ est engendré par ces relations, qui en sont les couvertures.

Un unique élément minimal pour $\leq_d$, mais plusieurs éléments maximaux (nombres de Motzkin [A1006 (https://oeis.org/A001006)](https://oeis.org/A001006)). Donc pas un treillis.

Les ordres dextres sont des demi-treillis inférieurs (*i.e.* il existe $\cap$). Mais la définition de $\cap$ est compliquée.

Une *connexion inattendue* avec des travaux de Saneblidze.

Dans un contexte de topologie algébrique (espaces de lacets libres), Saneblidze a introduit certains polytopes.

"Freehedra" ou "polytopes de Hochschild"

Proposition : dans l'ordre partiel $\leq_d$ sur D_n, il existe un sous-ensemble dont le diagramme de Hasse est un polytope de Hochschild.

On a donc un ordre partiel de Hochschild, qui est un treillis. Voir l'article de Camille Combe sur ces objets remarquables.

Une autre variation sur le thème de Tamari : les ordres gloutons, notés $\leq_g$

On choisit une vallée i d'altitude h et on regarde le **dernier point** j à droite de i tel que tout le bloc entre i et j soit d'altitude au moins h.

Autrement dit, on termine le bloc juste avant le premier pas qui descend sous l'altitude h. Si $h = 0$, on continue jusqu'au bout du chemin.

On fait glisser ce bloc d'**une case** vers le nord-ouest, *i.e.* de (-1,+1).

Un exemple de couverture gloutonne:

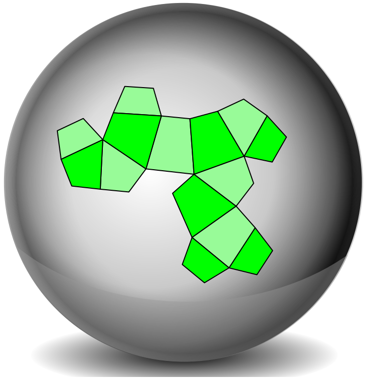
En fait, cet ordre partiel glouton $\leq_g$ est isomorphe au dual (ordre opposé) de l'ordre dextre $\leq_d$, par une bijection idoine.

Quelques **remarques** avant de poursuivre :

- Il existe beaucoup d'autres ordres partiels sympathiques sur des objets de type Catalan, par exemple les partitions non-croisées, les fonctions de stationnement croissantes, ou l'ordre de Pallo sur les arbres binaires plans
- les ordres d'inclusion $\leq_i$ et de Tamari $\leq_t$ se généralisent aux groupes de Coxeter finis, le cas standard étant associé aux groupes symétriques : c'est la combinatoire de Coxeter-Catalan, liée aux algèbres amassées. En fait, l'ordre de Tamari se généralise de deux manières différentes : sur les amas et sur les modules basculants
- on peut généraliser facilement aux chemins dans un rectangle $a \times b$ avec a premier à b, le cas standard étant $(a, b) = (n, n + 1)$
- plein de connexions élégantes avec l'algèbre : invariants diagonaux, opérades, algèbres de Hopf, catégories Calabi-Yau fractionnaires, etc
- une conjecture ouverte d'équivalence dérivée entre $\leq_i$ et $\leq_t$ (théorie des représentations des ordres partiels)
- etc

Quelques mots sur une connexion avec les **cartes topologiques**

- une carte (de genre zéro) est un graphe connexe plongé dans la sphère, à déformation près. Le complémentaire est alors une union de cellules.



objets élégants, très importants et étudiés, en combinatoire, probabilité, physique mathématique

Différentes sortes de cartes ont été comptées par [William Tutte (https://fr.wikipedia.org/wiki/William_Tutte)](https://fr.wikipedia.org/wiki/William_Tutte) dans les années 1960

De très nombreux travaux sur le sujet depuis, toujours actif, et même en plein boum.

Cartes et Intervalles

Coincïdences enumératives et bijections remarquables :

Note : un intervalle est une paire (a, b) avec $a \leq b$.

Note : toutes les cartes sont enracinées et de genre zéro.

- intervalles dans Tamari = triangulations 3-connexes A260 (https://oeis.org/A000260) (C., Olivier Bernardi et Nicolas Bonichon)
- intervalles synchrones dans Tamari = cartes non-séparables A139 (https://oeis.org/A000139) (Louis-François Préville-Ratelle et Xavier Viennot)
- intervalles nouveaux dans Tamari = cartes bicubiques A257 (https://oeis.org/A000257) (C., Wenjie Fang)
- intervalles dans les ordres dextres = cartes bicubiques A257 (https://oeis.org/A000257) (C.)

suite : un travail en cours sur les ordres gloutons dans les rectangles

Conclusion:

- beaucoup d'ordres intéressants sur des objets de type Catalan
- sur les chemins de Dyck, au moins trois jolis ordres $\leq_i, \leq_t, \leq_d$
- l'ordre $\leq_g$ offre un autre point de vue utile sur $\leq_d$
- une connexion mystérieuse avec les cartes planaires, et des bijections sophistiquées entre intervalles et cartes
- nombreuses ramifications algébriques : combinatoire de Coxeter-Catalan, algèbres amassées, invariants diagonaux, équivalences dérivées, etc

Bonus 🎁

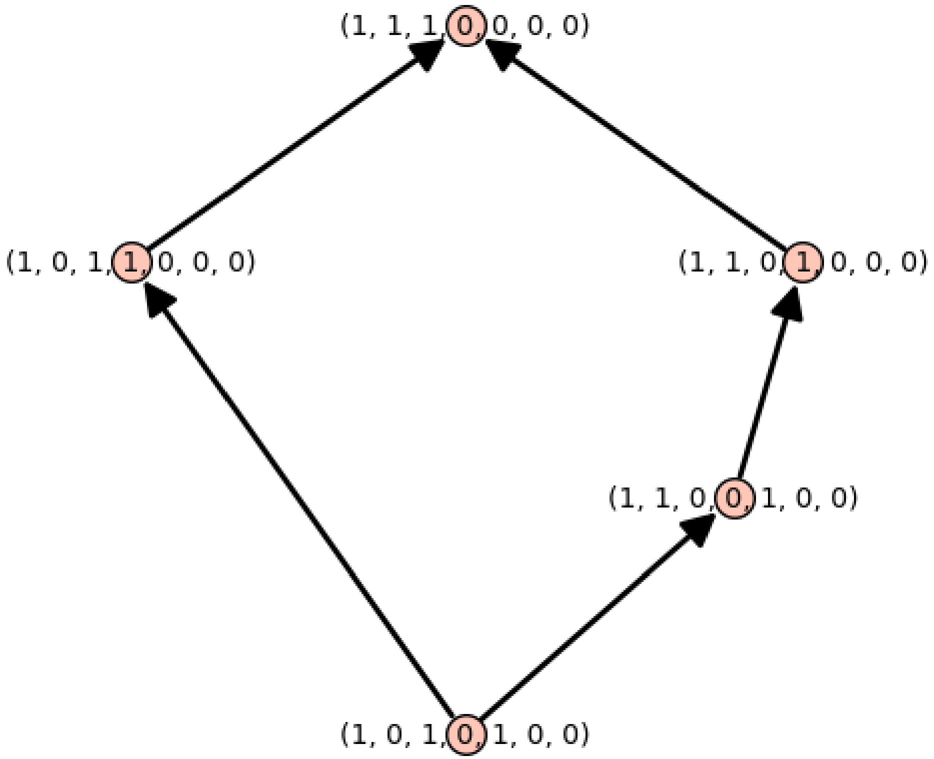
quelque invariants utiles des ordres partiels :

- cardinal
- fonction de Möbius (qui contient de l'information topologique)
- polynôme Zeta (en une variable)
- polynôme des degrés (en deux variables)
- nombre d'intervalles
- **nombre d'intervalles linéaires** (une conjecture récente pour Tamari)
- polynôme de Coxeter (en une variable, invariant par équivalence dérivée)

etc

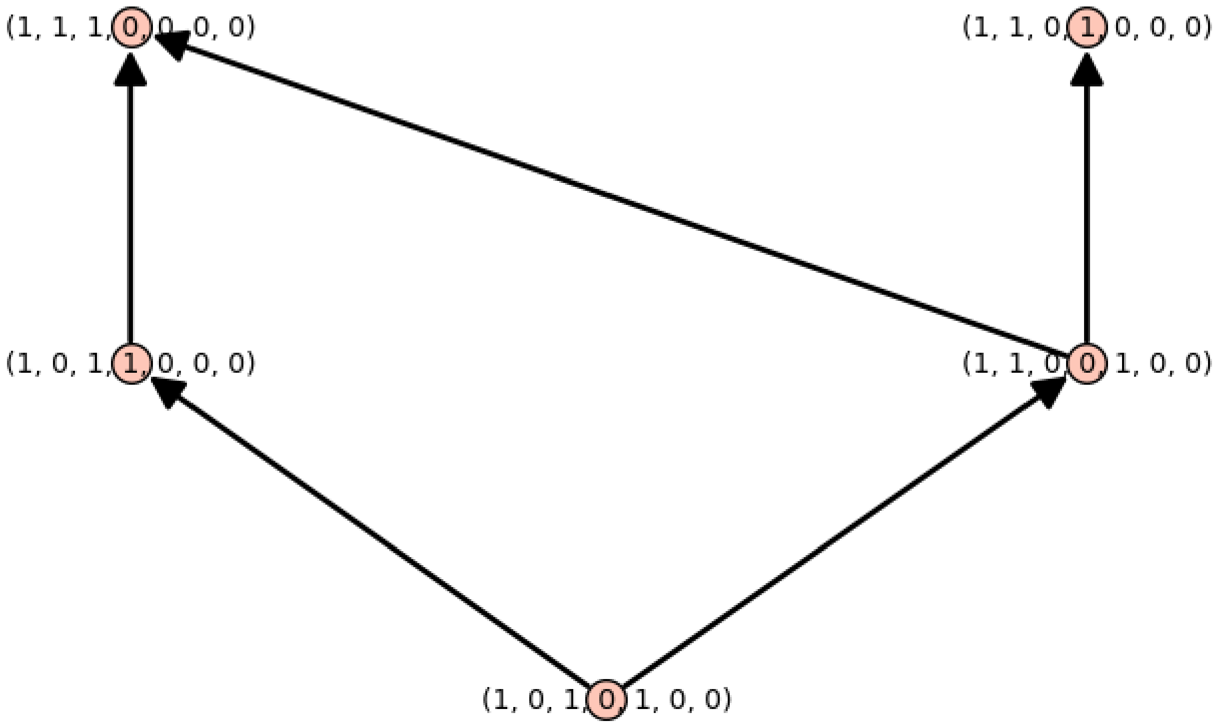
In [7]:
```
P = posets.TamariLattice(3); P.plot()
```

Out[7]:



In [8]:
```
Q = posets.DexterSemilattice(3); Q.plot()
```

Out[8]:



In [ ]: